交代級数を用いた実数の構成法について (解析的整数論とその周辺 : 近似と漸近的手法を通して見た数論)

池田, 創一

数理解析研究所講究録
第 1874 巻 2014 年 139-149

交代級数を用いた実数の構成法について

名古屋大学・多元数理科学研究科　池田 創一
Soichi Ikeda
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　はじめに

この文書の標題は上で書いたように「交代級数を用いた実数の構成法について」であるが、どんな内容なのかが想像できない方もいるかもしれないので、以下ではこの文書の内容について大まかな説明をする。

1.1　実数を構成するとは

まずこれから書くことは、[8] に詳しく書いてあることを筆者の考えをふまえつつまとめたものであることを述べておく。

現在の数学が扱う対象のほとんどが集合論により記述できることは大学の講義でも習うことであるし、また経験的にも分かっていることであろう。そして現在「集合論」といえば、多くの場合は公理的集合論を指すだろう。

ところが、自然数や実数といった数についての公理は公理的集合論の公理ではない。また、公理的集合論の公理が直接数を定義している訳でもない。つまり公理的集合論において、数は (後から) 定義され、その性質は定理として証明されるものである。例えば、自然数 (ここでは 0 も含む) は $0=\emptyset$, $1=\{0\}=\{\emptyset\}$, $n+1=\{0,1,2,\ldots,n\}=n\cup\{n\}$ と定義される (本当は公理的集合論の公理「無限公理」を用いて自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ が定義される)。そして、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ と数の世界を広げていくのである。この文書は $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ を構成する方法について述べたものである。

1.2 実数の構成法の例

実数の構成法はいくつか知られている。有名なものとしては有理数からなるコーシー列達の同値類を用いる方法やデデキントの切断を用いる方法がある (このあたりのことも [8] に解説がある)。ここでは筆者の研究に関連の深い A. Knopfmacher と J. Knopfmacher の方法について簡単に述べる。彼らの方法は実数の級数表示 (小数展開のようなもの) から逆に実数を構成する方法である。

彼らはまず古くから知られている実数のシルベスター級数展開の類似物として、以下の交代シルベスター級数展開を定義し、その性質を調べた。

交代シルベスター級数展開 $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_0 = [\alpha]$, $A_1 = \alpha - a_0$ とする。$n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \left[\frac{1}{A_n}\right]$$

および

$$A_{n+1} = \frac{1}{a_n} - A_n$$

とおけば、

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots$$

となる。またここで $a_1 \geq 1$ かつ $a_{n+1} \geq a_n(a_n + 1)$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ。

大雑把に言うと、Knopfmacher らは整数列 $\{a_n\}$ が実数になることを示したのである。

(注意: 以上に述べたのは Knopfmacher らの [6] での仕事の一部である。彼らは実数の他の級数表示や無限積表示からも実数が構成できることを示している。それらについては [4] および [5] を参照。)

1.3 筆者の結果の概要

まず筆者は交代シルベスター級数展開を一般化した以下の一般交代シルベスター級数展開を定義し、その性質を調べた (性質については次の章で述べる)。

一般交代シルベスター級数展開　$\alpha \in \mathbb{R}$, $q_0 = [\alpha]$, $A_1 = \alpha - q_0$ とする。また $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正整数列とする。$n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \left[\frac{c_n}{A_n}\right] \qquad (A_n \neq 0),$$

$$q_n = \begin{cases} \frac{c_n}{a_n} & (A_n \neq 0) \\ 0 & (A_n = 0) \end{cases}$$

および

$$A_{n+1} = q_n - A_n$$

とおけば、

$$\alpha = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q_n \tag{1}$$

となる。(注: $c_n = 1$ の場合が交代シルベスター級数と同等になる。)

そして筆者は $\forall n \in \mathbb{N}[c_n \mid c_{n+1}]$ が成り立つとき、この級数表示から逆に実数が構成できることを示した。すなわち、$\forall n \in \mathbb{N}[c_n \mid c_{n+1}]$ なる正整数列 $\{c_n\}$ を固定するとき、

$$S(\{c_n\}) = \{\{q_n\}_{n=0}^{\infty} \mid \{q_n\} \text{ は (1) に表れる }\} \tag{2}$$

が $\mathbb{R}$ になることを示した。

証明の方針は Knopfmacher らの手法に近いが、改良された点もある。まず筆者による証明は、実数の演算に関する性質 (例えば、結合法則など) の証明が主に一つの一般的な補題を用いることによってなされることがある。そしてその補題は Knopfmacher らの仕事 [4], [5], [6] でもおそらく用いることができる。さらに、上で述べたような $\{c_n\}$ は無限に存在するから、筆者による証明は実数の構成法が無限にあることを示していることがある。

2　一般交代シルベスター級数の性質

この章では一般交代シルベスター級数の基本的な性質について簡単に述べる。なお、この章では正整数列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとり固定することにする。

命題2.1　一般交代シルベスター級数は以下の性質を満たす。ここで $n \in \mathbb{N}$ とする。

1. $A_n \neq 0$ ならば
$$\frac{c_n}{a_n + 1} < A_n \leq \frac{c_n}{a_n}$$

2. $A_{n+1} \neq 0$ ならば
$$a_{n+1} + 1 > \frac{c_{n+1}}{c_n} a_n(a_n + 1)$$

3. $A_n \geq A_{n+1}$ である。特に $A_n \neq 0$ ならば $A_n > A_{n+1}$ である。

4. $q_n \leq 1$ である。

5. $A_{n+1} \neq 0$ ならば $a_{n+1} > a_n$ である。

6. $A_n \neq 0$ ならば $A_{n+1} < \frac{1}{a_n+1}$ である。

7. $q_n \geq q_{n+1}$ である。特に $q_{n+1} \neq 0$ ならば $q_n > q_{n+1}$ である。

証明の概要　1 は級数展開の定義から明らかである。2 は 1 から分かる。他のものは 1 と 2 を認めれば難しくない。□

注意
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} q_k = A_1 + (-1)^{n-1} A_{n+1}$$
が成り立つので、命題2.1 から (1) の級数は収束する。したがって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して
$$(-1)^{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} q_k = (-1)^{n-1} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} (A_{k+1} + A_k) = A_n \qquad (3)$$
が成り立つ。

命題 2.2 $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \alpha'$ とする。また、$a_n{}'$, $A_n{}'$, q'_n を α' を一般交代シルベスター級数展開したときに表れる a_n, A_n, q_n に対応するものとする。ここで

$$i = \min\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid q_j \neq q'_j\}$$

とおけば、$\alpha < \alpha'$ は

$$\begin{cases} q_0 < q'_0 & (i = 0) \\ q_i < q'_i & (2 \nmid i) \\ q_i > q'_i & (2 \mid i \text{ かつ } i \geq 2) \end{cases}$$

と同値である。

命題 2.3 $\alpha \in \mathbb{Q}$ となる必要十分条件は $q_m = 0$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在することである。

注意 命題 2.3 は $\alpha \in \mathbb{Q}$ となる必要十分条件は一般交代シルベスター級数が本質的に有限で終わる (ある項から先の項が全て 0 になる) ことであると述べている。

以上の命題 2.1, 2.2, 2.3 は、一般交代シルベスター級数が交代シルベスター級数と類似の良い性質を持っていることを示している。

また次の章では実数の構成を行うのだが、そこでは実数の順序 (大小関係) を特徴づける命題 2.2 と有理数を特徴づける命題 2.3 が重要な役割を果たす。

3 実数の構成

この章では $\forall n \in \mathbb{N}[c_n | c_{n+1}]$ なる正整数列 $\{c_n\}$ を任意にとって固定し、1 章で定義した $S(\{c_n\})$ が $\mathbb{R}$ になること (適切な構造を入れることで我々が知っている $\mathbb{R}$ と同型になること) をみる。なお、$\{q_n\}_{n=0}^{\infty} \in S(\{c_n\})$ を $(q_0, q_1, q_2, \ldots)$ と同一視する。

注意 $\forall n \in \mathbb{N}[c_n | c_{n+1}]$ という条件のもとでは命題 2.1 の 2 が

$$a_{n+1} \geq \frac{c_{n+1}}{c_n} a_n(a_n + 1)$$

になる。もし上の不等式で等号が成り立ち、かつ $q_{n+2}=0$ ならば、

$$A_n = q_n - q_{n+1} = \frac{c_n}{a_n+1}$$

となる。これは q_n の定義に反するので $q_{n+2} \neq 0$ または

$$a_{n+1} > \frac{c_{n+1}}{c_n} a_n(a_n+1)$$

が成り立つ。

1章では $S(\{c_n\})$ を実数の存在を仮定して定義した。$S(\{c_n\})$ を実数の構成に使うためには実数の存在を仮定せずに $S(\{c_n\})$ を定義する必要がある。まず、以下のように定義する。

定義 集合 $T(\{c_n\})$ を以下のように定義する。

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正整数列で

$$a_{n+1} \geq \frac{c_{n+1}}{c_n} a_n(a_n+1)$$

   を満たす。

2. $n \in \mathbb{N}$ に対して $q_n = 0$ または $q_n = c_n/a_n$ である。

3. $q_0 \in \mathbb{Z}$ である。

4. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $q_n \leq 1$ である。

5. $q_1 = 1$ ならば $q_2 \neq 0$ である。

6. ある自然数 m に対して $q_m = 0$ ならば、$q_n = 0$ が $n \geq m$ なる全ての n について成り立つ。

7. $q_{n+1} \neq 0$ ならば $q_{n+2} \neq 0$ または

$$a_{n+1} > \frac{c_{n+1}}{c_n} a_n(a_n+1)$$

   が成り立つ。

8. $\{q_n\}$ が以上の条件を満たす場合に限り、$\{q_n\}_{n=0}^{\infty} \in T(\{c_n\})$ である。

この定義のもとで以下が成り立つ。

命題 3.1 $S(\{c_n\}) = T(\{c_n\})$

これにより $S(\{c_n\})$ は有理数の言葉で定義できることが分かった。以下では $S = S(\{c_n\})$ とおき、S に実数体としての構造を入れる。

まずは順序を入れる。次の定義は命題 2.2 と本質的に同じである。

定義 $\{p_n\}, \{q_n\} \in S$, $\{p_n\} \neq \{q_n\}$ とする。また

$$i = \min\{j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid p_j \neq q_j\}$$

とおく。S 上の二項関係 $<$ を

$$\{p_n\} < \{q_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} p_0 < q_0 & (i = 0), \\ p_i < q_i & (2 \nmid i), \\ p_i > q_i & (2 \mid i \text{ and } i \geq 2) \end{cases}$$

と定める。

命題 3.2 任意の $\{p_n\}, \{q_n\}, \{r_n\} \in S$ に対して以下が成り立つ。

1. $\{p_n\} < \{p_n\}$ は成り立たない (非反射律)。
2. $\{p_n\} < \{q_n\}$ または $\{p_n\} = \{q_n\}$ または $\{q_n\} < \{p_n\}$ が成り立つ (三分律)。
3. $\{p_n\} < \{q_n\}$ かつ $\{q_n\} < \{r_n\}$ ならば $\{p_n\} < \{r_n\}$ が成り立つ (推移律)。

すなわち $<$ は S 上の狭義の全順序になる。

命題 3.2 により $<$ が我々のよく知っている実数の大小関係と同様の性質をもつことが分かった。また命題 2.2 と 2.3 を考慮すれば、$\mathbb{Q}$ を S に埋め込めることが容易に分かる。すなわち $\mathbb{Q}$ と

$$Q_S = \{\{q_n\} \in S \mid q_m = 0 \text{ となる } m \in \mathbb{N} \text{ が存在する }\}$$

を自然に同一視することができる ($\mathbb{Q}$ と Q_S は順序同型である)。そこで以下では $\mathbb{Q} \subset S$ と考える。

次の定理はいわゆるワイエルシュトラスの公理である。この定理は実数体を特徴づけるだけでなく、S に演算を導入する際に重要である。

定理 3.1 S の空でない上に (下に) 有界な部分集合には上限 (下限) が存在する。

次に S に加法や乗法を導入したいのだが、いろいろと準備が必要である。ここではそれを簡単に述べる。

定義 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を有理数列とする。$L(a_n)$ により「任意の自然数 m に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば $|a_n| < 1/m$ が成り立つ」を表す (これは $L(a_n)$ でいわゆる $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を表す、ということである)。

以下の定義と補題は [6] と同様である。

定義 $X = (x_0, x_1, \ldots) \in S$ とする。$n \in \mathbb{N}$ に対して $X_n \in S$ を

$$X_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

と定義する。

補題 $X \in S$ とすると

1. $X_{2n} \leq X_{2n+2} \leq X \leq X_{2n+1} \leq X_{2n-1}$
2. $L(X_{2n-1} - X_{2n})$
3. $\sup X_{2n} = \inf X_{2n-1} = X$

が成り立つ。

次の補題は S の演算に関する性質を証明するのに重要な役割を果たす。またこの補題は Knopfmacher らの仕事 [4], [5], [6] でも利用可能と思われる。

主補題 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を上に有界で単調増加な有理数列とする。このとき $\sup a_n = \sup b_n$ は $L(a_n - b_n)$ と同値である。

次に S に演算を導入するが、以下の定義は [6] と同様である。

定義 $X, Y \in S$ とするとき、

1. $0 = (0, 0, \ldots)(= 0 \in \mathbb{Q})$
2. $X + Y = \sup(X_{2n} + Y_{2n})$
3. $-X = \sup(-X_{2n-1})$

と定義する。さらに

1. $1 = (1, 0, \ldots)(= 1 \in \mathbb{Q})$.
2. $$X \cdot Y = \begin{cases} \sup(X_{2n} \cdot Y_{2n}) & (X, Y \geq 0) \\ (-X) \cdot (-Y) & (X, Y \leq 0) \\ -((-X) \cdot Y) & (X \leq 0, Y \geq 0) \\ -(X \cdot (-Y)) & (X \geq 0, Y \leq 0) \end{cases}$$
3. $$X^{-1} = \begin{cases} \sup((X_{2n-1})^{-1}) & (X > 0) \\ -((-X)^{-1}) & (X < 0) \end{cases}$$

と定義する。

以下の命題達により $+$ や $\cdot$ が通常の加法や乗法の性質をもつことが分かる。また証明にはどれも主補題を用いる。

命題 3.3 任意の $X, Y, Z \in S$ に対して以下が成り立つ。

1. $X + Y = Y + X$
2. $X + 0 = X$
3. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
4. $X + (-X) = 0$
5. $X < Y$ ならば $X + Z < Y + Z$

命題 3.4 任意の $X, Y, Z \in S$ に対して以下が成り立つ。

1. $X \cdot Y = Y \cdot X$
2. $X \cdot 1 = X$
3. $X \cdot Y = -((-X) \cdot Y) = -(X \cdot (-Y))$
4. $X \cdot X^{-1} = 1 \quad (X \neq 0)$
5. $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
6. $X < Y$ かつ $Z > 0$ ならば $XZ < YZ$

命題 3.5 任意の $X, Y, Z \in S$ に対して $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ が成り立つ。

命題 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 より S は順序体である。定理 3.1(ワイエルシュトラスの公理) を満たす任意の順序体は $\mathbb{R}$ と同型であるということが知られている ([1] または [8] を参照) ので、以下の定理を得る。

定理 3.2 S は $\mathbb{R}$ と同型である。

参考文献

[1] L. W. Cohen and G. Ehrlich, The Structure of the Real Number System, D. Van Nostrand Co. 1963.

[2] S. Ikeda, A new construction of the real numbers with alternating series, arXiv:1208.1434.

[3] K.-H. Indlekofer, A. Knopfmacher and J. Knopfmacher, Alternating Balkema-Oppenheim expansions of real numbers, Bull. Soc. Math. Belg. **44** (1992), 1728.

[4] A. Knopfmacher and J. Knopfmacher, A new construction of the real numbers (via infinite products), Nieuw Arch. Wisk. **5** (1987), 19-31.

[5] A. Knopfmacher and J. Knopfmacher, Two concrete new constructions of the real numbers, Rocky Mountain J. Math. **18** (1988), 813-824.

[6] A. Knopfmacher and J. Knopfmacher, Two constructions of the real numbers via alternating series, Internat. J. Math. Math. Sci. **12** (1989), 603-613.

[7] A. Oppenheim, The representation of real numbers by infinite series of rationals, Acta Arith. **21** (1972), 391-398.

[8] 田中 一之、鈴木登志雄, 数学のロジックと集合論, 培風館, 2007.